

Übungen zur Vorlesung
Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2016/17
 von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Wiederholung aus der Vorlesung

Wie in der Vorlesung sei die folgende $(1 + 3) \times (1 + 3)$ – Matrix

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^\top \\ \vec{b} & M \end{pmatrix} \quad (1)$$

die Darstellung einer allgemeinen Lorentztransformation in Lor_+^\uparrow . Dann gelten die Relationen

$$\vec{a}^2 = \gamma^2 - 1, \quad M\vec{a} = \gamma\vec{b}, \quad MM^\top = E_3 + \vec{b} \otimes \vec{b}^\top, \quad (2a)$$

$$\vec{b}^2 = \gamma^2 - 1, \quad M^\top\vec{b} = \gamma\vec{a}, \quad M^\top M = E_3 + \vec{a} \otimes \vec{a}^\top. \quad (2b)$$

Mit Hilfe dieser Relationen wurde dann nachgewiesen, dass

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^\top \\ \vec{b} & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\vec{\beta}^\top \\ \gamma\vec{\beta} & E_3 + (\gamma - 1)\vec{n} \otimes \vec{n}^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & D \end{pmatrix} =: B(\vec{\beta}) \cdot R(D). \quad (3a)$$

Hier ist

$$D := M - \frac{\vec{b} \otimes \vec{a}^\top}{1 + \gamma} \in \text{SO}(3), \quad (3b)$$

$$\vec{\beta} := \vec{b}/\gamma = \vec{n}\beta = \vec{n}(1 - \gamma^{-2})^{1/2} \in B_1 \subset \mathbb{R}^3. \quad (3c)$$

Die Drehung D genügt

$$D\vec{a} = \vec{b}. \quad (4)$$

Diese Polarzerlegung entspricht der Zerlegung einer allgemeinen Lorentztransformation in eine Drehung $R(D)$ und einen Boost $B(\vec{\beta})$. Die Größen $D \in \text{SO}(3)$ und $\vec{\beta} \in B_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ unterliegen keinen weiteren Einschränkungen, so dass wir die Lorentztransformationen treu durch $B_1 \times \text{SO}(3)$ parametrisieren können. Wir schreiben dann $L(\vec{\beta}, D) := B(\vec{\beta})R(D)$. Die Polarzerlegung definiert dann einen topologischen Homöomorphismus $\text{Lor}_+^\uparrow \cong B_1 \times \text{SO}(3) \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}P^3$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Hilfe der Relationen (2), dass

$$D\vec{a} = \vec{b}, \quad (5a)$$

dass also D eine Drehung in der orientierten Ebene $\text{Span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ darstellt, deren Winkel $\theta \in [0, \pi]$ gegeben ist durch

$$\cos(\theta) = \frac{\text{Spur}(M) - 1}{\gamma + 1}. \quad (5b)$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie

$$R(D)B(\vec{\beta})R(D^{-1}) = B(D\vec{\beta}). \quad (6)$$

Wir definieren die beiden Abbildungen

$$\star : B_1 \times B_1 \rightarrow B_1, \quad (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2) \mapsto \vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2, \quad (7a)$$

$$T : B_1 \times B_1 \rightarrow \text{SO}(3), \quad (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2) \mapsto T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2], \quad (7b)$$

durch

$$B(\vec{\beta}_1)B(\vec{\beta}_2) =: B(\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2) \cdot R(T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]). \quad (7c)$$

Man nennt \star das „Einstein'sche Additionsgesetz“ für Geschwindigkeiten (hier in Einheiten von c ; d.h. $\vec{\beta} = \vec{v}/c$) und $T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]$ die zum geordneten Paar von Geschwindigkeiten $\vec{\beta}_1$ und $\vec{\beta}_2$ gehörige „Thomas-Drehung“.

Zeigen Sie

$$\vec{0} \star \vec{\beta} = \vec{\beta} \star \vec{0} = \vec{\beta}. \quad (8a)$$

$$T[\vec{0}, \vec{\beta}] = T[\vec{\beta}, \vec{0}] = E_3. \quad (8b)$$

Wenden Sie (6) auf (7c) an und leiten Sie dann aus der Eindeutigkeit der Polarzerlegung folgende Äquivarianzeigenschaften für die Funktionen \star und T unter Drehungen ab:

$$D(\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2) = (D\vec{\beta}_1) \star (D\vec{\beta}_2), \quad (9a)$$

$$D T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2] D^{-1} = T[D\vec{\beta}_1, D\vec{\beta}_2]. \quad (9b)$$

Zeigen Sie nun weiter, dass das allgemeine Multiplikationsgesetz der Lorentzgruppe in den Parametern β und D mit Hilfe der Funktionen \star und T wie folgt lautet:

$$L(\vec{\beta}_1, D_1)L(\vec{\beta}_2, D_2) = L(\vec{\beta}, D) \quad (10a)$$

mit

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 \star D_1\vec{\beta}_2, \quad (10b)$$

$$D = T[\vec{\beta}_1, D_1\vec{\beta}_2]D_1D_2. \quad (10c)$$

Rechnen Sie nach, dass $B(\vec{\beta})B(-\vec{\beta}) = E_4$ und folgern Sie

$$\vec{\beta} \star (-\vec{\beta}) = (-\vec{\beta}) \star \vec{\beta} = \vec{0}, \quad (11a)$$

$$T[\vec{\beta}, -\vec{\beta}] = T[-\vec{\beta}, \vec{\beta}] = E_3. \quad (11b)$$

Leiten Sie daraus ab, dass

$$[L(\vec{\beta}, D)]^{-1} = L(-D^{-1}\vec{\beta}, D^{-1}). \quad (12)$$

Aufgabe 3

Wir benutzen die Bezeichnungen aus der obigen Wiederholung sowie die Notationen $\gamma(\beta) = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ mit $\beta := \|\vec{\beta}\|$ und $\beta_1 \star \beta_2 := \|\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2\|$.

Zeigen Sie

$$\gamma(\beta_1 \star \beta_2) = \gamma(\beta_1)\gamma(\beta_2)(1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2), \quad (13)$$

und weiter

$$\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\beta}_1 + P_{\parallel}(\vec{\beta}_2) + \gamma^{-1}(\beta_1)P_{\perp}(\vec{\beta}_2)}{1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2}. \quad (14)$$

Dabei sind P_{\parallel} und P_{\perp} die Euklid'schen Orthogonalprojektionen parallel zu und senkrecht auf $\vec{\beta}_1$.

Zeigen Sie schließlich: Ist φ der Winkel zwischen $\vec{\beta}_1$ und $\vec{\beta}_2$, dann ist $T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]$ eine Drehung in der orientierten Ebene $\text{Span}\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2\}$ deren Winkel θ bestimmt ist durch

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) \sin^2 \varphi}{1 + \gamma_1 \gamma_2 + \sqrt{(\gamma_1^2 - 1)(\gamma_2^2 - 1)} \cos \varphi}, \quad (15)$$

wobei $\gamma_a := \gamma(\beta_a)$ ($a = 1, 2$).

Zeigen Sie, dass bei festgehaltenem φ der Winkel θ im Limes $\gamma_{1,2} \rightarrow \infty$ gegen φ strebt. Lässt man umgekehrt $\gamma_{1,2}$ fest und betrachtet den Winkel θ als Funktion von φ , dann hat diese Funktion ein Maximum bei

$$\cos(\varphi_m) = -\sqrt{\frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}} \quad (16a)$$

mit einem Wert $\theta_m := \theta(\varphi_m)$, für den gilt

$$\cos(\theta_m) = 1 - 2 \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} = -\cos(2\varphi_m), \quad (16b)$$

also

$$\theta_m = 2\varphi_m - \pi. \quad (16c)$$

Setzen Sie $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ und bestimmen Sie den Schwellenwert $\gamma_{\pi/2}$ für γ , oberhalb dem $\theta_m > \pi/2$. Welcher Schwellengeschwindigkeit $\beta_{\pi/2}$ entspricht das? Beachten Sie: Aus (16c) folgt, dass der Winkel φ_m zwischen den Boostrichtungen, bei dem θ_m gerade $\pi/2$ ist, immer bei $\varphi_m = 3\pi/4$ (entsprechend 135°) liegt, unabhängig davon, ob die Geschwindigkeiten gleich sind oder nicht. Für höhere Geschwindigkeiten ist $\theta = \pi/2$ auch für kleinere φ zu erreichen, wie etwa $\theta \rightarrow \varphi$ für $\gamma_{1,2} \rightarrow \infty$ zeigt (s.o.).

Aufgabe 4

Geben Sie eine geometrische Interpretation von (13), indem Sie diese Gleichung in die Rapiditäten $\rho := \tanh^{-1}(\beta)$ umschreiben. *Tipp: Cosh-Satz für die Seiten eines hyperbolischen Dreiecks.*

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Einstein'sche Addition \star weder kommutativ noch assoziativ ist und stattdessen folgende Relationen gelten:

$$\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2 = T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2](\vec{\beta}_2 \star \vec{\beta}_1) \quad (17)$$

und

$$\vec{\beta}_1 \star (\vec{\beta}_2 \star \vec{\beta}_3) = (\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2) \star T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]\vec{\beta}_3. \quad (18)$$

Tipp: Gleichung (17) folgt aus (5a) angewandt auf (7c). Zur Ableitung von (18) gehen Sie aus von $B(\vec{\beta}_1)(B(\vec{\beta}_2)B(\vec{\beta}_3)) = (B(\vec{\beta}_1)B(\vec{\beta}_2))B(\vec{\beta}_3)$ [d.h. Assoziativität innerhalb der Lorentzgruppe], zerlegen beide Seiten polar und Vergleichen dann die Boost-Anteile (Eindeutigkeit der Polarzerlegung!).

Aufgabe 6

Sei $L = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$ die Lie-Algebra der $SO(3)$, so dass $[e_a, e_b] = \varepsilon_{ab}^n e_n$. Beschreiben Sie die Lie-Algebra, die durch Kontraktion über $H = \text{Span}\{e_3\}$ entsteht. Zu welcher Lie-Gruppe ist sie die Lie-Algebra?