

Übungen zur Vorlesung
Kanonische Formulierung der ART
von DOMENICO GIULINI

Blatt 7

Aufgabe 1

Sei

$$\begin{aligned} d_{\vec{c}} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \vec{x} &\mapsto d_{\vec{c}}(\vec{x}) \equiv d(\vec{c}, \vec{x}) := \|\vec{x} - \vec{c}\| \end{aligned} \quad (1)$$

die euklidische Distanzfunktion relativ zu \vec{c} und

$$\begin{aligned} J_{(\vec{c}, a)} : C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto J_{(\vec{c}, a)}(f) := (a/d_{\vec{c}})(f \circ I_{(\vec{c}, a)}) \end{aligned} \quad (2)$$

die bereits auf Blatt 6 definierte Abbildung, wobei

$$I_{(\vec{c}, a)}(\vec{x}) := \vec{c} + (\vec{x} - \vec{c}) \frac{a^2}{\|\vec{x} - \vec{c}\|^2} \quad (3)$$

die Inversionsabbildung an der Kugel mit Zentrum \vec{c} und Radius a ist.

Wir betrachten die folgende Funktion $P[\vec{b}, p] : \mathbb{R}^3 - \{\vec{b}\} \rightarrow \mathbb{R}$, genannt „Pol der Stärke p am Ort \vec{b} “, die definiert ist durch

$$P[\vec{b}, p] := \frac{p}{d_{\vec{b}}} . \quad (4)$$

Zeigen Sie

$$d_{\vec{c}} \cdot (d_{\vec{b}} \circ I_{(\vec{c}, a)}) = d(\vec{b}, \vec{c}) \cdot d_{I_{(\vec{c}, a)}(\vec{b})} \quad (5)$$

was äquivalent ist zu

$$I_{(\vec{c}, a)}^* d_{\vec{b}} = d(\vec{b}, \vec{c}) \cdot \frac{d_{I_{(\vec{c}, a)}(\vec{b})}}{d_{\vec{c}}} . \quad (6)$$

In Worten: Die mit der Inversion an der Sphäre vom Radius a um den Punkt \vec{c} transformierte Distanzfunktion relativ zum Punkt \vec{b} ist proportional zum Quotienten aus der Distanzfunktion relativ zum invertierten Punkt \vec{b} mit der Distanzfunktion relativ zum Punkt \vec{c} . Der Proportionalitätsfaktor ist die Distanz zwischen \vec{b} und \vec{c} .

Zeigen Sie als Korollar von (6), dass

$$J_{(\vec{c}, a)}(P[\vec{b}, p]) = P \left[I_{(\vec{c}, a)}(\vec{b}), pa/d(\vec{b}, \vec{c}) \right] . \quad (7)$$

In Worten: Der mit $J_{(\vec{c}, a)}$ transformierte Pol der Stärke p am Ort \vec{b} ist wieder ein Pol, nun am transformierten Ort $I_{(\vec{c}, a)}(\vec{b})$ mit einer um den multiplikativen Faktor $a/\|\vec{b} - \vec{c}\|$ veränderten Stärke.

Aufgabe 2

Diese Aufgabe ist etwas aufwendiger und deshalb in drei Teile geteilt. Es wird gezeigt, wie man eine explizite analytische Form einer konform flachen Metrik gewinnen kann, die unter den zwei (und damit allen Kombinationen daraus) Inversionen zweier Sphären gleichen Radius' invariant ist.

Teil 1

Betrachten Sie im \mathbb{R}^3 die zwei nicht überlappenden Sphären vom gleichen Radius a mit Mittelpunkten $\vec{c} = \pm c\vec{e}_z$, wobei $c > a$. Zu diesen gehören die beiden Inversionsabbildungen $I_{\pm} := I_{(\pm c\vec{e}_z, a)}$ und die assoziierten Abbildungen $J_{\pm} := (a/d_{\pm c\vec{e}_z})I_{\pm}^*$ auf Funktionen. Indem Sie J_{\pm} auf die konstante Funktion $f_0 \equiv 1$ anwenden erhalten Sie Pole der Stärke a an den Punkten $\pm c\vec{e}_z$. Indem Sie diese Pole mit allen weiteren Kombinationen der Abbildungen J_{\pm} abbilden, erhalten Sie weitere, abzählbar unendlich viele Pole innerhalb jeder der beiden Sphären. Zeigen Sie, dass die Positionen und Polstärken folgenden Rekursionsrelationen genügen:

$$c_{n+1} = c - \frac{a^2}{c + c_n}, \quad (8a)$$

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{a}{c + c_n}, \quad (8b)$$

wobei die c_n die Beträge der z -Achsenabschnitte sind und die Anfangswerte $c_0 = c$ und $p_0 = a$ betragen. Zeigen Sie weiter, dass diese Relationen gelöst werden durch

$$c_n = k \coth(n\mu_0), \quad (9a)$$

$$p_n = \frac{k}{\sinh(n\mu_0)}, \quad (9b)$$

wobei k und μ_0 wie folgt durch die Konstanten a und c bestimmt sind:

$$c = c_1 = k \coth \mu_0, \quad a = p_1 = \frac{k}{\sinh \mu_0}. \quad (9c)$$

Aus (9) sieht man (was per Konstruktion klar ist - warum?), dass die Summe der Polstärken innerhalb einer Sphäre endlich ist und sich ihre Orte auf der z -Achse bei $z = \pm k$ häufen, ohne jedoch der Sphäre beliebig nahe zu kommen. Zeigen Sie, dass die Pole innerhalb einer Sphäre von dieser immer einen euklidischen Abstand haben der größer ist als

$$d_{\min} = k(1 - \tanh(\mu_0/2)). \quad (10)$$

Teil 2

Auf der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^3 - \{c\vec{e}_z, -c\vec{e}_z\}$ führen wir nun *bi-sphärische Polarkoordinaten* ein. Diese erhält man durch Drehen um die z -Achse (Drehwinkel φ) der *ebenen Bi-Polarkoordinaten* μ und η , die die xz -Ebene ohne die Punkte $\pm c\vec{e}_z$ wie folgt parametrisieren: Sei $\xi := z + ix$, dann

$$\exp(\mu - i\eta) = \frac{\xi + k}{\xi - k} \quad (11)$$

Leiten Sie die daraus die Inverse ab,

$$\xi = k \frac{\exp(\mu - i\eta) + 1}{\exp(\mu - i\eta) - 1} = k \frac{\sinh \mu + i \sin \eta}{\cosh \mu - \cos \eta} \quad (12)$$

und rechnen Sie damit nach, dass

$$|\xi - k \coth \mu| = \frac{k}{|\sinh \mu|}, \quad (13a)$$

$$|\xi - ik \cot \eta| = \frac{k}{|\sin \eta|}. \quad (13b)$$

Ziehen Sie daraus folgende Schlüsse: Die bi-sphärischen Polarkoordinaten sind gegeben durch

$$x = k \frac{\sin \eta \cos \varphi}{\cosh \mu - \cos \eta}, \quad y = k \frac{\sin \eta \sin \varphi}{\cosh \mu - \cos \eta}, \quad z = k \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu - \cos \eta}. \quad (14)$$

Die Flächen konstanter Werte $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ sind Sphären mit Mittelpunkten auf der z -Achse bei $z = K \coth \mu$ und Radien $K/\sinh \mu$. Da die z -Achsenabschnitte der Mittelpunkte stets größer sind als die Radien, liegen die Sphären immer ganz in den Halbräumen $z > 0$ oder $z < 0$. Die Flächen konstanter Werte $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$ sind „selbstdurchdringende Tori“, die durch Drehen um die z -Achse aus Kreisen in der xz -Ebene mit Mittelpunkten auf der x -Achse bei $x = K \cot \eta$ und Radien $K/\sin \eta$ entstehen. Da nun die x -Achsenabschnitte der Mittelpunkte kleiner als die Radien sind, schneidet jeder Kreis die z Achse in zwei Punkten. Bei Drehung um die z -Achse bleiben diese Schnittpunkte fest und werden zu den (singulären) Polen zweier ineinandergeschachtelter topologischer (metrisch deformierter) 2-Sphären, die sich an den an Polen gerade berühren. Die Flächen konstanter φ -Werte sind natürlich einfach die Halbebenen, die die z -Achse als Rand enthalten. Je zwei Flächen aus unterschiedlichen Scharen schneiden sich orthogonal, das heißt, die Normalenvektoren stehen am Schnittpunkt senkrecht aufeinander. Siehe Abbildung 1.

Zeigen Sie, dass die flache Metrik des \mathbb{R}^3 in bis-sphärischen Polarkoordinaten die folgende Form hat

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = k^2 \frac{d\mu^2 + d\eta^2 + \sin^2 \eta d\varphi^2}{(\cosh^2 \mu - \cos^2 \eta)^2}. \quad (15)$$

Tipp: Es ist einfacher zuerst die flache Metrik in der xz -Ebene auszurechnen indem man in $d\xi \otimes d\bar{\xi}$ die erste Gleichung (12) benutzt.

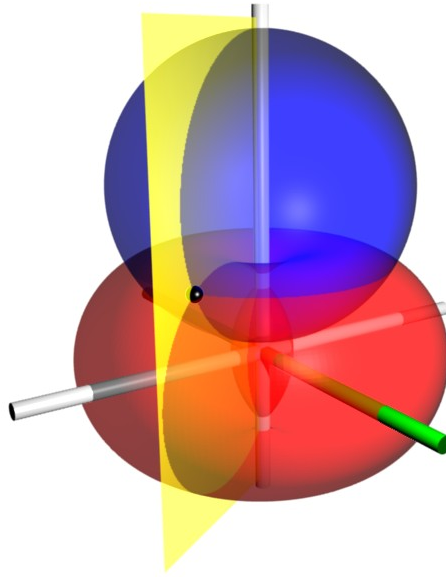


Abbildung 1: Niveauflächen der bi-sphärischen Polarkoordinaten: Blau für μ (Sphären), rot für η (selbstdurchdringende Tori) und gelb für φ (Halbebenen). Die z -Achse zeigt nach oben.

Teil 3

Rechnen Sie explizit nach, dass das Quadrat der euklidischen Distanz von den Punkten $\pm c_n \vec{e}_z$ in bi-sphärischen Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\|\vec{x} \mp c_n \vec{e}_z\|^2 = \frac{k^2}{\sinh^2(n\mu_0)} \cdot \frac{\cosh(\mu \mp 2n\mu_0) - \cos \eta}{\cosh \mu - \cos \eta}. \quad (16)$$

Tipp: Nerven behalten - rechnen - und diverse Additionstheoreme für Hyperbolische Funktionen verwenden.

Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass die Inversionsabbildungen $I_{(\pm c_n \vec{e}_z, p_n)}$ in bi-sphärischen Polarkoordinaten einfach gegeben sind durch

$$I_{(\pm c_n \vec{e}_z, p_n)} : (\mu, \eta, \varphi) \mapsto (-\mu \pm 2n\mu_0, \eta, \varphi). \quad (17)$$

Für $n = 1$ folgt daraus insbesondere, dass die Inversion an den Ausgangssphären $\mu = \pm \mu_0$ gegeben ist durch

$$I_{(\pm c \vec{e}_z, a)} : (\mu, \eta, \varphi) \mapsto (-\mu \pm 2\mu_0, \eta, \varphi). \quad (18)$$

Ebenfalls als Korollar folgt sofort aus (16), dass in bi-sphärischen Polarkoordinaten die Funktion (4) des Pols am Ort $\pm c_n \vec{e}_z$ und der Stärke p_n folgende Form annimmt:

$$P[\pm c_n \vec{e}_z, p_n] = \frac{p_n}{\|\vec{x} \mp c_n \vec{e}_z\|} = \sqrt{\frac{\cosh \mu - \cos \eta}{\cosh(\mu \mp 2n\mu_0) - \cos \eta}}. \quad (19)$$

Zeigen Sie damit und mit Gleichung (15) schließlich das Endresultat, dass die konform flache Metrik $h = \Phi^4 \delta$ auf $\Sigma := \mathbb{R}^3 - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{c_n \vec{e}_z, -c_n \vec{e}_z\}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
 h &= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\cosh \mu - \cos \eta}{\cosh(\mu + 2n\mu_0) - \cos \eta}} \right\}^4 \delta \\
 &= k^2 \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\cosh(\mu + 2n\mu_0) - \cos \eta]^{-1/2} \right\}^4 (d\mu^2 + d\eta^2 + \sin^2 \eta d\varphi^2).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Aus (18) ist evident, dass diese Metrik die Inversionen $I_{(\pm c \vec{e}_z, a)}$ als Isometrien besitzt und dass die 2-Sphären $\mu = \pm \mu_0$ total geodätische Untermannigfaltigkeiten sind (geben Sie das Argument hierfür). Argumentieren Sie, dass man die Regionen $|\mu| > \mu_0$ nun entfernen (und damit wegen (10) alle Pole) und die Ränder $\mu = \pm \mu_0$ mit identifizieren kann. Man erhält eine überall reguläre 3-Mannigfaltigkeit - welcher Topologie (s. Abbildung 2)?

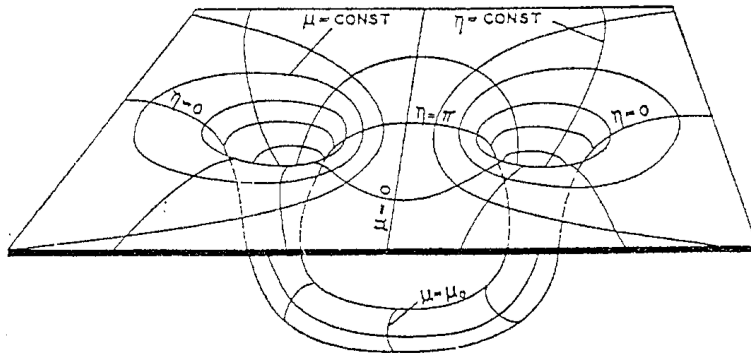


Abbildung 2: Topologie der xz -Ebene nach Identifikation der Kreise $\mu = \pm \mu_0$. Man beachte auch die Niveaulinien der (μ, η) Koordinaten.

Zeigen Sie, dass die ADM-Masse im räumlich unendlichen (in geometrischen Einheiten) der Metrik (20) gegeben ist durch

$$m_\infty = 4k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n\mu_0)}. \tag{21}$$

Tipp: Sie müssen nichts rechnen, wenn Sie sich daran erinnern, wie sich die ADM-Masse bei $r \rightarrow \infty$ aus den Polstärken zusammensetzt.

Wir definieren die „Loch-Masse“ (wieder in geometrischen Einheiten) durch

$$m_L = 2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(1 + \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{p_{n'}}{\|\vec{c}_n - \vec{c}_{n'}\|} \right) \tag{22}$$

wobei die Summe über n über alle Pole innerhalb der einen Sphäre läuft und die Summe über n' über die der anderen. Warum ist das sinnvoll? Zeigen Sie,

dass

$$m_L = 2k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sinh(n\mu_0)} \quad (23)$$

Man könnte $\Delta m := m_{\infty} - 2m_L$ den Massendefekt nennen.

Zeigen Sie, dass die 2-Sphären $\mu = \pm\mu_0$ total geodätisch (insbesondere also Minimalflächen) sind und dass die Kurven mit $\eta = \pi$ und $\phi = \text{konst.}$ eine Geodätische ist, entlang derer der Abstand der 2-Sphären $\mu = \pm\mu_0$ gegeben ist durch

$$\ell = 2(k + \mu_0 m_L), \quad (24)$$

mit m_L wie in (23).

Vergleichen Sie (24) mit dem euklidischen Abstand der Sphären, indem Sie aus (9c) zeigen, dass dieser gegeben ist durch

$$\ell_{\text{eukl}} = 2k \tanh(\mu_0/2). \quad (25)$$

Tipp: Wer (24) an der Tafel lückenlos vorrechnet, bekommt eine Einladung zur Holzofen-Pizza!

Aufgabe 3

Für das zeitsymmetrische ($K_{nm} = 0$) konform-flache ($h = \Phi^4 \delta$) Anfangswertproblem zu einer sphärisch-symmetrischen Massenverteilung konstanter Dichte im Ball mit Radius R wurde in der Vorlesung die exakte Lösung des skalaren Cosntraints bestimmt zu

$$\Phi(r) = \begin{cases} \left(\frac{(1 + \frac{m}{2R})^{3/2}}{(1 + \frac{mr^2}{2R^3})^{1/2}} \right), & \text{für } r \leq R \\ \left(1 + \frac{m}{2R} \right), & \text{für } r \geq R, \end{cases} \quad (26)$$

wobei m ein Parameter ist, der die Bedeutung der gravitativ wirksamen Gesamtmasse (ADM-Masse) hat und R den Koordinatenradius des Sterns bezeichnet.

Unter welchen Bedingungen an die Parameter (R, m) hat die Geometrie der Metrik $h = \Phi^4 \delta$ eine sphärisch-symmetrische Minimalfläche (d.h. einen scheinbaren Horizont) innerhalb des Sterns?

Aufgabe 4

Auf $\Sigma := \mathbb{R}^3 - \{\vec{c}\}$ betrachten wir wieder die Inversionsabbildung (3). Nehmen Sie an, $h = \Phi^4 \delta$ sei eine konform flache Metrik die $I_{(\vec{c}, a)}$ als Isometrie besitzt, d.h. $I_{(\vec{c}, a)}^* h = h$. Zeigen Sie, dass dann

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{2a} \right]_{r=a} = 0. \quad (27)$$

wobei r die Radialkoordinate des um \vec{c} basierten Polarkoordinatensystems von (Σ, δ) ist.

Tipp: $r = a$ is Fixpunktmenge einer Isometrie und deshalb notwendig eine Minimalfläche. Der Flächeninhalt der Sphären um \vec{c} als Funktion von r ist deshalb stationär bei $r = a$.

Aufgabe 5

Auf $(\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}, \delta)$ mit standard Karte $\{x^1, x^2, x^3\}$ betrachten wir folgende Vektorfelder und Volumenform:

$$\nu = \frac{x^n}{r} \frac{\partial}{\partial x^n} \quad (28)$$

$$A = A^n \frac{\partial}{\partial x^n} \quad (29)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3!} \varepsilon_{lmn} dx^l \wedge dx^m \wedge dx^n \quad (30)$$

wobei A^n und $\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{[lmn]}$ konstant sind.

Zeigen Sie:

$$(I_{(\vec{c}, a)})_* \nu = -(a/r)^{-2} \nu \quad (31a)$$

$$(I_{(\vec{c}, a)})^* \nu^b = -(a/r)^2 \nu^b \quad (31b)$$

und

$$(I_{(\vec{c}, a)})_* A = (a/r)^{-2} (A - 2\nu(\nu \cdot A)), \quad (32a)$$

$$(I_{(\vec{c}, a)})^* A^b = (a/r)^2 (A^b - 2\nu^b(\nu \cdot A)), \quad (32b)$$

wobei $\nu^b := \delta(\nu, \cdot)$ (Gleiches mit A) und $\nu \cdot A := \delta(\nu, A)$. Außerdem gilt

$$(I_{(\vec{c}, a)})^* \varepsilon = -(a/r)^6 \varepsilon. \quad (33)$$