

Übungen zur Vorlesung
Kanonische Formulierung der ART

von DOMENICO GIULINI

Blatt 9

Aufgabe 1

Eine Kugelschale vom Radius R , homogen verteilter Ruhemasse m_0 und elektrischer Ladung e hat die Gesamtenergie

$$E = m_0 c^2 + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} - G \frac{M^2}{2R}. \quad (1)$$

Dabei repräsentiert der zweite Term der rechten Seite die elektrostatische Selbstenergie (positiv wegen Abstoßung) und der letzte Term die gravitostatische Selbstenergie (negativ wegen Anziehung). Mit M haben wir die „aktive Gravitationsmasse“ bezeichnet, die für die gravitative Selbstenergie verantwortlich ist.

Nehmen Sie im Sinne des Äquivalenzprinzips an, dass M alle beteiligten Energien involviert, so dass also $M = E/c^2$ zu setzen ist. Lösen Sie dann die aus (1) entstehende quadratische Gleichung nach $M = E/c^2$ auf, was Ihnen $M(R, e, m_0, G)$ liefert (die Abhängigkeit von ϵ_0 interessiert hier nicht). Diskutieren Sie davon den Limes $R \rightarrow 0$. Was hätten Sie nach einer vorhergehenden Potenzreihenentwicklung in G (gravitativer Kopplungsparameter) für dem Limes $R \rightarrow 0$ erhalten? Wie interpretieren Sie diese Ergebnisse? Welche Rolle könnte demnach die Gravitation bei der Berechnung von Selbstenergien allgemein spielen?

Aufgabe 2

Betrachten Sie ein reelles (d.h. ungeladenes) massives Skalarfeld in der Raumzeit (M, g) . Letztere sei durch eine einparametrische Schar raumartiger Einbettungen $e_t : \Sigma \hookrightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit Σ geblättert. Wie zu Beginn der Vorlesung gezeigt, lassen sich dann die Lorentz-Metrik $g \in ST_2^0 M$ und ihre Inverse $g^{-1} \in ST_0^2 M$ durch ihre Komponenten bezüglich der Koordinaten $(x^0 \equiv ct, x^m)$ schreiben als

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_n \\ \beta_m & h_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2a)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & \alpha^{-2} \beta^n \\ \alpha^{-2} \beta^m & h^{mn} - \alpha^{-2} \beta^m \beta^n \end{pmatrix}. \quad (2b)$$

Dabei sind α und β die Lapse-Funktion bzw. das Shift-Vektorfeld, so dass $\partial_t = \alpha n + \beta$, mit n als Feld der zukunftsgerichteten Normalen auf den Blättern der Foliation.

Die Wirkung des Skalarfeldes ist, bis auf eine dimensionsbehaftete multiplikative Konstante, gegeben durch (vergewissern Sie sich der richtigen Wahl der Vorzeichen):

$$\mathcal{L}[\phi; \Omega] := -\frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-\det\{g_{\mu\nu}\}} \left(g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi + m^2 \phi^2 \right). \quad (3)$$

Führen Sie eine (3+1)-Zerlegung durch indem Sie die Wirkung mit Hilfe von (2) in den angepassten Koordinaten (t, x^m) schreiben. Zeigen Sie zunächst, dass die zu ϕ konjugierten Impulse durch

$$\pi := \sqrt{\det\{h_{mn}\}} \alpha^{-1} (\partial_t - L_{\beta}) \phi = \sqrt{\det\{h_{mn}\}} L_n \phi. \quad (4)$$

Stellen Sie dann die Hamilton-Funktion auf und zeigen Sie, dass diese die Form

$$H[\phi, \pi; \alpha, \beta] = S[\phi, \pi](\alpha) + V[\phi, \pi](\beta) \quad (5)$$

hat (lineare Abhängigkeit von α und β) und berechnen Sie S und V . Berechnen Sie die Poisson-Klammern der kanonischen Variablen ϕ und π mit $V[\phi, \pi](\beta)$ und zeigen Sie, dass diese gerade die Lie-Ableitungen ersterer nach β sind. Zeigen Sie weiter durch explizites nachrechnen, dass die Phasenraumfunktionen $(\phi, \pi) \mapsto S[\phi, \pi](\alpha)$ und $(\phi, \pi) \mapsto V[\phi, \pi](\beta)$ folgende Poissonrelationen erfüllen:

$$\{V(\beta_1), V(\beta_2)\} = V([\beta_1, \beta_2]), \quad (6a)$$

$$\{V(\beta), S(\alpha)\} = S(\beta(\alpha)), \quad (6b)$$

$$\{S(\alpha_1), S(\alpha_2)\} = V(\alpha_1(d\alpha_2)^{\#} - \alpha_2(d\alpha_1)^{\#}). \quad (6c)$$

Stellen die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für das Skalarfeld auf und zeigen Sie, dass diese Äquivalent zur Euler-Lagrange-Gleichung (Klein-Gordon-Gleichung) der Wirkung (3) sind.