

Das Rätsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums

Domenico Giulini und Norbert Straumann

Die Grundprinzipien der Allgemeinen Relativitätstheorie lassen die Freiheit, die Feldgleichungen um den so genannten kosmologischen Term zu erweitern. Dieser Term wird möglicherweise ganz oder teilweise von Quantenfluktuationen der Materiefelder verursacht und kann je nach Vorzeichen und Größe in gewissen Entwicklungsphasen des Universums zu einer beschleunigten oder verzögerten Expansion führen. Neueste kosmologische Beobachtungen scheinen dafür zu sprechen, dass wir uns gegenwärtig in einer Phase *beschleunigter* Expansion befinden. Wir geben zunächst einen Abriss der Geschichte und fundamentalen Problematik des kosmologischen Terms und stellen dann die gegenwärtigen Evidenzen für einen positiven Wert vor, der eben zu einer beschleunigten Expansion führt¹⁾.

Astronomische Beobachtungen der letzten zwei Jahre deuten immer deutlicher auf eine *beschleunigte* Expansion des Universums. Dies klingt zunächst sehr erstaunlich, sind wir doch daran gewöhnt, dass die Gravitationskraft immer anziehend ist und deshalb auch die großräumige Fluchtbewegung der Galaxien abbremsen sollte. Tatsächlich lässt sich eine kosmische Abstoßung weder bei den Planetenbahnen in unserem Sonnensystem noch in den Bewegungen von Galaxiengruppen beobachten.

Die Möglichkeit, eine kosmische Abstoßung in den Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) zu implementieren, erkannte Einstein schon Anfang 1917, etwas mehr als ein Jahr nach Aufstellung dieser Gleichungen, als er versuchte, diese auf das ganze Universum anzuwenden [1]. Dabei bemerkte er, dass es trotz der stark einschränkenden formalen Prinzipien noch gestattet ist, die ursprüngliche Form der Feldgleichungen um einen sehr einfachen Zusatzterm zu erweitern, den man seither den kosmologischen Term nennt. Dieser beinhaltet einen noch unbestimmten multiplikativen Parameter, den man allgemein mit Λ bezeichnet und für den sich die Bezeichnung *kosmologische Konstante* eingebürgert hat. Für positives Λ wirkt der kosmologische Term wie eine konstante, den Raum auseinanderziehende Spannungskraft. Da sich diese im Raum additiv verhält, kann sie unter Umständen auf großen Skalen über eine gravitative Abbremsung dominieren.



Supernovae vom Typ Ia weisen fast alle eine praktisch identische intrinsische Helligkeit auf. Sie eignen sich daher als sog. Standardkerzen zur Bestimmung von kosmischen Entfernungen. Die Beobachtung von vielen Supernovae hat in den letzten Jahren gezeigt, dass sich das Universum immer schneller ausdehnt. Die Aufnahme vom 17. Mai 2000 zeigt die Supernova SN 2000CJ in der Galaxie NGC 6753 (blauer Punkt in der 8-Uhr-Position). Die Galaxie ist etwa 160 Mio. Lichtjahre von uns entfernt. (Quelle: CTIO, www.ctio.noao.edu)

Später hat Einstein seine Einführung des kosmologischen Terms bedauert, aus heutiger Sicht wahrscheinlich zu Unrecht. Vielmehr ist ein kosmologischer Term sogar zu erwarten, da nach heutigen Quantenfeldtheorien auch der nominell leere Raum (das Vakuum) i. A. eine nicht-verschwindende Energie besitzt. Die gravitative Wirkung dieser so genannten *Vakuumenergie* ist aber genau die eines kosmologischen Terms. Obwohl dieser Term im Falle einer positiven kosmologischen Konstante einer positiven Energiedichte entspricht, führt er trotzdem zu einer gravitativen Abstoßung. Dies werden wir noch ausführlicher begründen.

Tatsächlich wundern sich die theoretischen Physiker schon lange darüber, warum die Vakuumenergiedichte nicht sehr viel größer ist als es die astronomischen Beobachtungen zulassen. Dieser mysteriöse Aspekt der kosmologischen Konstante wird seit geraumer Zeit als eines der tiefsten Rätsel der Grundlagenphysik angesehen.

Für Astronomen und Kosmologen gibt es einen zweiten wichtigen Aspekt im Zusammenhang mit einer möglicherweise nicht verschwindenden kosmologischen Konstanten. Da nämlich einerseits die Vakuumenergiedichte zeitlich konstant ist, aber andererseits

1) Eine erweiterte Fassung dieses Artikels findet der interessierte Leser in <http://xxx.lanl.gov> arXiv:astro-ph/0009568

Priv.-Doz. Dr. Domenico Giulini und Prof. Dr. Norbert Straumann, Institut für Theoretische Physik der Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Schweiz

die Energiedichte der Materie mit der kosmischen Expansion abnimmt, ist es höchst erstaunlich, dass beide ausgerechnet zum gegenwärtigen Zeitpunkt von vergleichbarer Größe sind, wie die noch zu besprechenden Messungen zeigen. Lösungsversuche dieses „kosmischen Koinzidenzproblems“ werden zur Zeit lebhaft diskutiert. Wir werden am Schluss dieses Aufsatzes kurz darauf eingehen.

Eine kurze Geschichte des kosmologischen Terms

Die Vorstellung eines dynamischen (expandierenden) Universums hat sich erst im 20. Jahrhundert durchgesetzt, obwohl schon Newton (nach Intervention Bentleys) klar war, dass die universell anziehende Gravitation kein statisches Universum zulässt [2].

Versucht man aber tatsächlich die Newtonschen Gravitationsgesetze auf das ganze Universum anzuwenden, so wird man einer ganzen Reihe von Problemen begegnen: So sind die Ausdrücke für das Gravitationspotential und die Kraft nur dann wohldefiniert, wenn die Massendichte für große räumliche Abstände schneller als r^{-2} bzw. r^{-3} abfällt. Das unendlich gedachte Universum kann also nicht eine im Mittel homogene Massenverteilung endlicher Dichte tragen. Gegen die Annahme eines mehr oder weniger räumlich lokalisierten Universums im statistischen Gleichgewicht spricht aber der so genannte „Verödungseinwand“, nach dem im Laufe der Zeit immer wieder Sterne ins räumlich Unendliche „abdampfen“ können. Diesem könnte man zwar mit der Annahme eines im räumlich Unendlichen nicht konstanten, sondern ansteigenden Gravitationspotentials begegnen, doch spricht gegen dieses die Beobachtungstatsache kleiner lokaler Relativgeschwindigkeiten der Sterne.

Newtonsche Analogie

Diese und ähnliche Schwierigkeiten haben schon lange vor Einsteins erster kosmologischer Arbeit dazu geführt, Abänderungen des Newtonschen Gravitationsgesetzes zu diskutieren. Von diesen Versuchen werden wir nur einen kurz erwähnen, weil er bei der Begründung des kosmologischen Terms eine gewisse Rolle gespielt hat und gerade deshalb Anlass zu Missverständnissen geben könnte. Dieser ging aus von dem Astronomen H. Seeliger, der, aufbauend auf Vorarbeiten C. Neumanns, eine zusätzliche exponentielle Dämpfung des üblichen Potentials in der Form $\exp(-r\sqrt{\Lambda})/r$ vorschlug [3], wobei Λ eine fundamentale Konstante von der Dimension Länge⁻² ist. Auf der Ebene der Feldgleichungen entspricht dies einer Ergänzung der üblichen Poisson-Gleichung durch einen zu Λ proportionalen Term in der Form

$$\Delta\phi - \Lambda\phi = 4\pi G\varrho, \quad (1)$$

wobei ϕ das Gravitationspotential bezeichnet, ϱ die Massendichte und G die Gravitationskonstante. Diese Gleichung besitzt nun eine reguläre Lösung für konstante Materieverteilung $\varrho > 0$, nämlich $\phi = -4\pi G\varrho/\Lambda$. Dieser können dann die Gravitationsfelder lokaler Inhomogenitäten einfach überlagert werden. Die oben beschriebenen Schwierigkeiten treten jetzt nicht mehr auf.

Diese Modifikation der Poisson-Gleichung durch den Λ -Term wurde seit Einsteins erster Arbeit [1] oft als Analogie für die Modifikation der Feldgleichungen der ART angesehen; stellvertretend sei hier auf S. 215 des berühmten Enzyklopädieartikels von Wolfgang Pauli

verwiesen [4]. Dies ist aber physikalisch irreführend, da der Λ -Term in der ART keineswegs den Effekt hat, die Reichweite der Gravitation zu beschränken.

Tatsächlich ist (1) auch *nicht* der Newtonsche Limes der modifizierten Einstein-Gleichungen. Um diesen zu verstehen, ist es überaus wichtig zu bemerken, dass in der ART die Quelle des skalaren Gravitationspotentials nicht allein durch die Massendichte ϱ gegeben ist, sondern durch die Summe $\varrho + 3p/c^2$, wo p den Materiedruck bezeichnet. Eine kosmologische Konstante Λ entspricht in der ART aber sowohl einer Massendichte $\varrho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$, als auch einem Druck $p_\Lambda = -\varrho_\Lambda c^2$.²⁾ Somit verursacht der Λ -Term im Newtonschen Limes den Zusatz $-2\varrho_\Lambda$ zur Quelle. Damit ist erklärt, warum eine *positive* Vakuumenergiedichte trotzdem eine gravitativ *abstoßende* Wirkung hat.

Für nichtrelativistische Materie der Massendichte ϱ_M ist der Newtonsche Limes also nicht durch (1) gegeben, sondern durch

$$\Delta\phi = 4\pi G(\varrho_M - 2\varrho_\Lambda). \quad (2)$$

Folgt man Ref. [5], so kann man ausgehend von (2) und den Euler-Gleichungen für die Materiebewegung die Friedmann-Lemaître-Gleichungen (10 – 12) von Kasten 1 innerhalb einer Newtonschen Kosmologie erhalten und interpretieren.

Das Machsche Prinzip

Ganz wesentlich für Einsteins Motivation, den kosmologischen Term einzuführen, war seine damalige Vermutung, dass damit das von ihm so genannte *Machsche Prinzip* erfüllt sei, nach dem die Trägheitskräfte ihre ausschließliche Ursache in der Wechselwirkung mit anderer Materie haben sollen. Insbesondere dürften Trägheitskräfte in einem Universum ohne Materie nicht existieren. Da Trägheit und Gravitation in der ART durch das Äquivalenzprinzip aber untrennbar miteinander zusammenhängen, bedeutet dies, dass die Feldgleichungen überhaupt keine Vakuumlösungen zulassen dürfen. Nun ist z.B. die flache Raum-Zeit der Speziellen Relativitätstheorie (Minkowski-Raum) zwar Vakuumlösung der gewöhnlichen Feldgleichungen, nicht aber der Gleichungen mit kosmologischem Term. Einstein erkannte aber auch, dass die Einführung des kosmologischen Terms allein noch nicht ausreichte. Ist der Raum nämlich nicht geschlossen³⁾, so kann durch Ansetzen willkürlicher Randbedingungen ein nicht verschwindendes Gravitationsfeld „erzeugt“ werden. Das „Machsche Prinzip“ erhoffte Einstein nun dadurch zu implementieren, dass er nur *räumlich geschlossene* Universen als Lösungen seiner neuen Feldgleichungen zuließ. Seine eigene diesen Forderungen genügende Lösung [1] ist das statische *Einstein-Universum* mit räumlich homogener, druckloser Massenverteilung in einem Raum mit der Topologie der 3-Sphäre S^3 (siehe Infokasten „Dynamik der Friedmann-Lemaître-Modelle mit kosmologischer Konstante“).

Entgegen Einsteins Hoffnung, dass ohne Materie keine solche Lösung existieren könne, gab noch im gleichen Jahr (1917) de Sitter eine statische *Vakuumlösung* der Gleichungen mit kosmologischer Konstante an, in der der Raum ebenfalls geschlossen (S^3) ist. Seiner ursprünglichen Hoffnung beraubt, meinte Einstein später: „...von dem Machschen Prinzip sollte man eigentlich überhaupt nicht mehr reden“. Was diejenigen, die sich nicht an diese Anweisung halten, trotzdem darüber reden, kann der Leser in [6] erfahren.

2) Schon in der Speziellen Relativitätstheorie gilt ja, dass die träge Masse eines Körpers von seinem Spannungszustand abhängt. Nach dem Prinzip der Gleichheit von träger und schwerer Masse gilt dies dann auch für letztere. Dass Druck = - Energiedichte kann man mit der Energieerhaltung einsehen: Da $\varrho_\Lambda = \text{konst.}$, vergrößert adiabatische Volumendilatation die innere Energie um $c^2\varrho_\Lambda\Delta V$, gleichzeitig wird dabei aber die Arbeit $-p_\Lambda\Delta V$ am System geleistet. Beide Beträge müssen nun gleich sein.

3) „Geschlossen“ ist ein topologischer Begriff, der – etwas ungenau – besagt, dass der Raum von beschränkter Ausdehnung (genau: kompakt) und ohne Rand ist. So ist etwa die Erdoberfläche (2-Sphäre) oder die Oberfläche eines Fahrradschlauches (2-Torus) geschlossen. Als „offen“ hingegen bezeichnet man z.B. die unendliche Ebene (oder allgemeiner: den R^n).

Vom statischen zum dynamischen Universum

Eine interessante Eigenschaft der de Sitter-Lösung bestand darin, dass sie trotz ihrer (scheinbaren) Stabilität eine gravitative Rotverschiebung implizierte, die als „de Sitter-Effekt“ bekannt wurde. Im Gegensatz zur wirklich statischen Lösung Einsteins stellte sich aber der statische Charakter der de Sitter-Lösung als nur *lokal* gültig heraus: global ist das ganze de Sitter-Universum ebenfalls einer zeitlichen Änderung unterworfen. Diese etwas subtilen mathematischen Sachverhalte wurden erst wesentlich durch Arbeiten des Mathematikers Hermann Weyl um 1923 geklärt. Heute wird konsequenterweise die de Sitter-Lösung als Spezialfall einer nichtstatischen Kosmologie in der Familie von Friedmann-Lemaître-Modellen (vgl. Kasten „Dynamik der Friedmann-Lemaître-Modelle mit kosmologischer Konstante“) verstanden.

Wegbereiter nichtstatischer Kosmologien waren die bahnbrechenden Arbeiten A. Friedmanns (1922, 1924) und die davon unabhängig entstandenen Arbeiten Lemaîtres (1927), der die kosmologische Rotverschiebung zum ersten Male als Folge der globalen Expansionsbewegung interpretierte. Trotzdem dominierten die „statischen“ Lösungen Einsteins und de Sitters die kosmologische Diskussion der 20er-Jahre. So hat erstaunlicherweise selbst Hubble noch 1929 die Resultate seiner vorhergehenden Beobachtungen der galaktischen Rotverschiebungen im Rahmen des als statisch angenommenen de Sitter-Universums interpretiert („de Sitter-Effekt“), und Einstein soll im Oktober 1927 anlässlich des Solvay-Kongresses in Brüssel zu Lemaître gesagt haben: „Vos calculs sont corrects, mais votre physique est abominable“ (vgl. dazu auch Kap. 5 in [7]).

Schließlich setzte sich aber Lemaîtres erfolgreiche Erklärung von Hubbles epochaler Entdeckung durch, vor allem unter dem Einfluss Eddingtons. Auch Einstein stellte sich bald auf die neue Lage ein und verwarf den kosmologischen Term und damit natürlich auch seine alte statische Lösung; nicht nur weil letztere keine Rechenschaft der kosmologischen Rotverschiebung geben konnte, sondern vor allem auch deshalb, weil sie sich als gegenüber Störungen instabil erwies [8] (siehe nebenstehenden Infokasten).

Das weitere Schicksal Lambdas

Einer weit verbreiteten Überlieferung zufolge soll Einstein später seine Einführung des kosmologischen Terms „als größte Dummheit meines Lebens“ bezeichnet haben; ein Beleg für dieses Zitat ist uns allerdings unbekannt. In [9] schrieb er dazu: „Würde die Hubble-Expansion bei Aufstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie bereits entdeckt gewesen sein, so wäre es nie zur Einführung des kosmologischen Glieds

gekommen. Es erscheint nun a posteriori um so ungerechtfertigter, ein solches Glied in die Feldgleichungen einzuführen, als dessen Einführung seine einzige ursprüngliche Existenzberechtigung – zu einer natürlichen Lösung des kosmologischen Problems zu führen – einbüßt.“ Viele der einflussreichen Kommentatoren, so z.B. Pauli und Jordan (siehe stellvertretend [4], S. 265 Anm. 18) haben sich diesem Urteil angeschlossen; doch gab es auch Ausnahmen (z. B. Anm. zu S. 35 in [5]).

Zeitweise geriet das Standardmodell von Friedmann und Lemaître ohne kosmologischen Term in Misskredit, da das Alter des Universums aufgrund von Hubbles Messungen im Vergleich zum Alter der Sterne als zu kurz herauskam. Deshalb wurde der Λ -Term wieder eingeführt, und ein früheres Modell von Lemaître mit verzögerter Expansion erfuhr eine Wiederbelebung. Das änderte sich aber, als neue astronomische Beobachtungen, vor allem durch W. Baade am Mt. Palomar-Observatorium, zu einer erheblichen Revision des Hubble-Parameters führten (vgl. die ausführliche Schilderung in [7]).

In jüngerer Zeit haben die von einigen Gruppen vertretenen relativ großen Werte des Hubble-Parameters

Dynamik der Friedmann-Lemaître-Modelle mit kosmologischer Konstante

In der Allgemeinen Relativitätstheorie besteht ein kosmologisches Modell in der Angabe zweier Strukturen: 1) einer 4-dimensionalen Raum-Zeit und 2) einem zeitartigen Vektorfeld, das die (mittlere) Bewegung der Materie repräsentiert. Die Klasse der Friedmann-Lemaître-Modelle ist definiert durch die Forderung, dass für *jeden* mit der Materie bewegten Beobachter Rotationssymmetrie herrscht. Daraus folgt, dass das 4-dimensionale Linienelement in der Form

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2 \quad (9)$$

geschrieben werden kann. (In diesem Kasten benutzen wir Einheiten, in denen $c=1$ ist.) Darin ist t die kosmische Zeit, die durch die Eigenzeit der Materie definiert wird und $d\sigma^2$ ist ein 3-dimensionales Linienelement einer räumlichen Geometrie von normierter konstanter Krümmung ± 1 oder 0. Die einzige dynamische Variable ist der globale räumliche Skalenfaktor $a(t)$, der angibt, wie sich physikalische Abstände zwischen Raumpunkten gleicher kosmischer Zeit t mit dieser Zeit ändern.

Setzt man (9) in die Einstein-Gleichung mit kosmologischer Konstante Λ ein, wobei die Materie durch eine Massendichte ρ_M und einen Druck p_M repräsentiert wird, so erhält man die zwei unabhängigen Gleichungen:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_M + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (10)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_M + 3p_M)a + \frac{\Lambda}{3}a. \quad (11)$$

Diese implizieren eine Art Energieerhaltungsgleichung:

$$\dot{\rho}_M = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_M + p_M). \quad (12)$$

Für $a \neq 0$ ziehen je zwei dieser Gleichungen die dritte nach sich und repräsentieren damit die gesamte Information der Einsteinschen Feldgleichungen. Ist $p_M \neq 0$, so muss zusätzlich noch eine Zustandsgleichung $p_M(\rho_M)$ hinzukommen.

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt der Entwicklung des Universums, der mit t_0 bezeichnet sei, dominiert aber die nichtrelativistische Materie, sodass

der Druck p_M vernachlässigbar ist. Gleichung (12) impliziert dann sofort die zeitliche Konstanz von $\rho_M a^3$. Der Hubble-Parameter ist definiert durch $H_0 = \dot{a}_0/a_0$, wobei hier und im Folgenden der Index 0 die Auswertung zur Zeit t_0 bezeichnet. Betrachtet man (10) zum Zeitpunkt t_0 und dividiert die Gleichung durch H_0^2 , so folgt mit (5)

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1, \quad (13)$$

wobei $\Omega_K := -k/a_0^2 H_0^2$.

Der Bremsparameter $q_0 := -\ddot{a}_0/a_0 H_0^2$ bestimmt, ob die gegenwärtige Expansion verzögert ($q_0 > 0$) oder beschleunigt ($q_0 < 0$) verläuft (vgl. Abb. 2). Addiert man $2 \times (11)$ zu (10) und benutzt (13), so erhält man

$$q_0 = (1/2)\Omega_M - \Omega_\Lambda. \quad (14)$$

Zum Verständnis der Dynamik bei verschwindendem Materiedruck ist es zweckmäßig, Gleichung (10) in folgender dimensionsloser Form zu schreiben: Man setzt $\tau := H_0 t$ und $x(\tau) := a(t)/a(t_0)$; mit $\rho_M a^3 = \text{konst.}$ erhält man

$$(dx/d\tau)^2 + U(x) = \Omega_K, \quad (15)$$

$$\text{mit } U(x) = -\Omega_M x^{-1} - \Omega_\Lambda x^2, \quad (16)$$

was (modulo eines unwichtigen globalen Faktors) als Energiesatz einer eindimensionalen Bewegung eines Teilchens im Potential $U(x)$ und Gesamtenergie Ω_K gemäß der Newtonschen Mechanik interpretiert werden kann. Für $\Omega_\Lambda > 0$ hat U genau ein Maximum. Rollt das Universum über dieses hinweg, so setzt eine unendliche Zeit beschleunigter Expansion ein, in der wir uns gegenwärtig zu befinden scheinen. Analog lassen sich mit (16) die in Abbildung 2 eingezeichneten Grenzkurven für die Dynamik nachvollziehen. Beachte insbesondere, dass $q_0 = 0$ gemäß (14) der Geraden $\Omega_\Lambda = (1/2)\Omega_M$ entspricht.

Einsteins statisches Universum entspricht der Lösung $\Lambda = a^{-2} = 4\pi G\rho_M$ und $k=1$ von (10, 11), die am Maximum des Potentials (16) verweilt und deshalb instabil ist. De Sitters Universum entspricht der Lösung für $\rho_M = p_M = 0$ und $k=1$, die, wie man aus (11) sofort sieht, für große t exponentiell expandiert.

erneut eine „Alterskrise“ verursacht, zu deren Behebung als Medizin einmal mehr der kosmologische Term herbeizitiert wurde. Auch andere Gründe für den Λ -Term wurden ins Feld geführt, welche sich aber bald – dank erweiterter Beobachtungen – als voreilig erwiesen. Die neuesten experimentellen Daten scheinen nun viel überzeugender als bisher erneut einen positiven Wert der kosmologischen Konstante zu fordern. Es bleibt gespannt abzuwarten, ob es diesmal dabei bleiben wird.

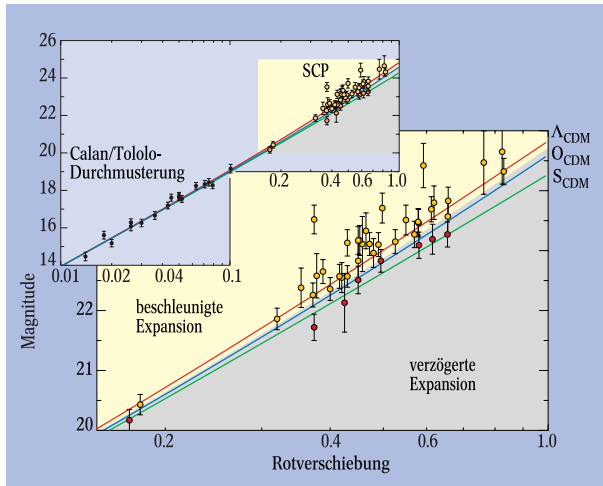


Abb. 1: Im Hubble-Diagramm sind die Magnituden gegen die Rotverschiebung aufgetragen, hier für 42 Typ-Ia-Supernovae bei hohen Rotverschiebungen des *Supernovae Cosmology Project* (SCP), sowie 18 Supernovae bei kleinen Rotverschiebungen der Calán/Tololo-Durchmusterung (Fehlerbalken: 1σ). Größere Magnituden entsprechen kleineren Helligkeiten. Die durchgezogenen Kurven entsprechen den theoretischen Erwartungen für Modelle zu verschiedenen Werten der Parameter (Ω_M, Ω_Λ). Dabei steht CDM stets für „Cold Dark Matter“. Die blaue Kurve (Ω_{CDM}) repräsentiert ein Modell negativer Krümmung zu den Parameterwerten $(1/3, 0)$; also $\Omega_K=2/3$. Die beiden anderen Kurven gehören zu flachen Modellen mit Parameterwerten $(1, 0)$ für S_{CDM} (grün) und $(1/3, 2/3)$ für Λ_{CDM} (rot). Im letzten Fall führt die beschleunigte Expansion zu einer Vergrößerung der räumlichen Abstände und damit zu einer relativen Erniedrigung (Erhöhung) der Helligkeit (Magnituden) der entfernteren Supernovae. Deshalb liegt die rote Kurve oberhalb der anderen. Das Diagramm ist [24] entnommen.

Das Problem der kosmologischen Konstante

Eine charakteristische Massendichte der Kosmologie ist die so genannte *kritische Dichte*

$$\rho_{\text{krit.}} = 3H_0^2/8\pi G \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3, \quad (3)$$

die im Falle einer verschwindenden kosmologischen Konstante einer flachen Geometrie zugehörig ist, während größere bzw. kleinere Massendichten dann zu positiven bzw. negativen Krümmungen führen. Auch im allgemeinen Fall ($\Lambda \neq 0$), in dem der Zusammenhang von Massendichte und Krümmung noch Λ involviert (vgl. (13) in Kasten 1), behält man $\rho_{\text{krit.}}$ als Bezugsgröße bei.

In (3) ist G die Newtonsche Gravitationskonstante und H_0 der *Hubble-Parameter* zum gegenwärtigen Zeitpunkt (deshalb Index 0). Für nicht allzu ferne Galaxien ist deren Geschwindigkeit proportional zur Entfernung. Die Proportionalitätskonstante in diesem *Hubbleschen Gesetz* ist gerade der Hubble-Parameter, der die Dimension einer inversen Zeit hat. Der Wert von H_0 bestimmt im Wesentlichen auch alle anderen kosmologischen Skalen und wird gerne in Form der so ge-

nannten „reduzierten Hubble-Konstante“ $h_0 := H_0/100 \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ angegeben, deren Wert gegenwärtig auf $h_0 \approx 0,65 \pm 0,1$ eingegrenzt ist; dabei ist $1\text{Mpc} = 3,086 \cdot 10^{19} \text{ km}$.

Verschiedene Beobachtungen zeigen nun, dass die der kosmologischen Konstante entsprechende gravitierende Energiedichte $\rho_\Lambda c^2$ nicht wesentlich größer als $\rho_{\text{krit.}} c^2$ sein kann. Zum Einen würde nämlich ein zu großes ρ_Λ (vgl. die linke obere Ecke von Abbildung 2) den Urknall verhindern⁴⁾ und damit unsere Erklärung der Häufigkeit leichter Elemente zunichte machen. Zum Anderen setzen Altersbestimmungen an Kugelsternhaufen eine obere Grenze an das Weltalter und damit an ρ_Λ , da ja ein positives ρ_Λ den Effekt hat, die Expansionsgeschwindigkeit in der Vergangenheit zu verlangsamen und damit das Weltalter zu erhöhen. In den der Teilchenphysik angemessenen Einheiten ist diese Schranke winzig:

$$\rho_\Lambda c^2 \leq 10^{-46} (\text{GeV})^4 / (\hbar c)^3. \quad (4)$$

Wie bereits erwähnt, ist es nämlich mehr als rätselhaft, weshalb aufgrund von Quantenfluktuationen das Standardmodell der Elementarteilchenphysik nicht eine gravitativ wirksame Vakuumenergiedichte nach sich zieht, welche die zuletzt angegebene Schranke gewaltig überschreitet. Als Maßstab kann z.B. die *Kondensationsenergiedichte* beim Phasenübergang der Quantenchromodynamik dienen, die etwa $10^{-1} (\text{GeV})^4 / (\hbar c)^3$ beträgt und somit die angegebene Schranke um mehr als 40 Größenordnungen übersteigt. Damit dürfte es sich um die schlechteste Prognose in der Geschichte der Physik handeln. Für denkbare Kompensationen verschiedener Beiträge gibt es aber keinen Grund, da alle Symmetrien – außer der elektromagnetischen Eichgruppe – (spontan) gebrochen sind. Zwar ist es logisch möglich, neben dem durch die Vakuumfluktuationen induzierten Λ_{vac} ein in den Feldgleichungen a priori vorhandenes Λ_0 anzunehmen, sodass dann deren Summe – das effektive Λ – die experimentelle Schranke nicht übersteigt. Dieses Λ_0 entspräche dann keiner neuen Energieform, sondern wäre als gleichberechtigter Bestandteil der Vakuum-Einstein-Gleichungen anzusehen. Doch würde eine solch extreme a-priori-Anpassung der Beträge („fine-tuning“) bis auf mindestens 40 Stellen keinen physikalischen Erklärungswert besitzen. Wir stehen hier vor einem tiefen Rätsel, zu dessen Lösung uns vorläufig die Grundlagen fehlen. Mehr dazu findet man im Übersichtsartikel von S. Weinberg [10].

Hubble-Diagramm der Supernovae vom Typ Ia bei hohen Rotverschiebungen

Naiv versteht man zunächst unter einem Hubble-Diagramm die Kurve, in der die Fluchtgeschwindigkeit als Funktion des Abstandes aufgetragen ist. Diese ist, wie schon gesagt, in sehr guter Näherung eine Gerade durch den Ursprung, deren Steigung durch den Hubble-Parameter H_0 gegeben ist. Verläuft die kosmische Expansion beschleunigt oder verzögert, so werden aber für große Abstände Abweichungen von der Geraden dadurch eintreten, dass die hier und heute bestimmten Geschwindigkeiten dem betreffenden Objekt um die Lichtlaufzeit früher zukommen und deshalb entsprechend kleiner bzw. größer sind.

Es ist jedoch zu bedenken, dass für die großen Skalen, mit denen es die Kosmologie zu tun hat, weder Abstände noch Geschwindigkeiten direkt messbare Größen sind. Eine als Abstandsmaß verwendete Größe

4) Genauer gilt in uns interessierenden Wertebereich $0,1 \leq \Omega_M \leq 1$, $|\Omega_\Lambda| \leq 1$, dass das Weltalter divergiert, falls Ω_Λ eine kritische obere Grenze von etwa $1 + 7/3 \Omega_M$ überschreitet.

ist die so genannte *Helligkeitsdistanz* D_L (siehe Infokasten „Kosmologische Distanzmaße“). Anstatt der Geschwindigkeit benutzt man die Rotverschiebung z , die durch $\lambda_e = (1+z)\lambda_a$ definiert ist, wobei λ_e die empfangene, λ_a die ausgestrahlte Wellenlänge ist. Es ist an dieser Stelle zu betonen, dass auch aus prinzipiellen Erwägungen der Begriff der Flucht-Geschwindigkeit hier sehr problematisch ist, da wir es mit weit entfernten Objekten in einer zeitlich veränderlichen Geometrie zu tun haben. Nicht die Objekte bewegen sich im Raum, sondern der Raum zwischen ihnen dehnt sich aus. Es ist daher i. A. auch sinnlos, die Rotverschiebung nach der Dopplerschen Formel in eine Geschwindigkeit zurückzurechnen, was zu allerlei Fehlinterpretationen Anlass geben kann.

Trägt man nun diese beiden Größen gegeneinander auf, mitunter mit vertauschten Achsen, also etwa die Helligkeitsdistanz (bzw. eine logarithmische Funktion von ihr) als Funktion der Rotverschiebung, so erhält man das, was heute allgemein ein Hubble-Diagramm genannt wird. Der zentrale Punkt ist nun, dass in Friedmann-Lemaître-Modellen diese Beziehung in berechenbarer Weise von den wichtigen kosmologischen Parametern

$$\Omega_M := \rho_M / \rho_{\text{krit}}, \quad \Omega_\Lambda := \rho_\Lambda / \rho_{\text{krit}} \quad (5)$$

abhängt, sodass aus Hubble-Diagrammen Einschränkungen an die Werte dieser Parameter abgeleitet werden können (vgl. Kasten „Kosmologische Distanzmaße“). Dabei repräsentiert Ω_M die gesamte Materie, einschließlich der dunklen Materie samt ihrem nicht-baryonischen Anteil. Die Größe $\Omega_K = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$ ist ein Maß für die (räumlich konstante) Krümmung des Raumes: Bei positiver bzw. negativer Krümmung ist Ω_K negativ bzw. positiv. Für einen flachen Raum ist $\Omega_K = 0$, d. h. $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ (siehe Infokasten „Dynamik der Friedmann-Lemaître-Modelle ...“).

Supernovae vom Typ Ia als Standardkerzen

Schon in den dreißiger Jahren wurde erkannt, dass sich Supernovae vom Typ Ia ausgezeichnet als so genannte Standardkerzen eignen, welche zudem bis zu kosmischen Distanzen von ca. 500 Mpc sichtbar sind [11]. Damit ist gemeint, dass die intrinsische Helligkeit einer Supernova diesen Typs bis auf seltene „Ausreißer“ stets innerhalb eines eng begrenzten Bereichs liegt. Für nähere Distanzen eignen sie sich besonders zur Bestimmung des Hubble-Parameters. Dafür ist freilich eine Kalibrierung der absoluten Magnitude mit verschiedenen Distanzbestimmungen nötig. Dank des Weltraumteleskops *Hubble* (HST) wurde dies mit Hilfe von so genannten Cepheiden möglich [12]. Cepheiden sind pulsierende und damit periodisch ihre Helligkeit verändernde Sterne, deren absolute Helligkeit in einem annähernd festen Verhältnis zu ihrer Pulsationsfrequenz steht. Beobachtungen dieser Frequenz und der scheinbaren Helligkeit lassen daher Rückschlüsse auf die Entfernung zu.

Wie eingangs erwähnt, ergeben sich bei beschleunigter bzw. verzögerter Expansion Abweichungen vom linearen Hubble-Gesetz bei großen Abständen. Diese werden mit dem so genannten *Bremsparameter* charakterisiert (Gl. (14) in Infokasten „Dynamik der Friedmann-Lemaître-Modelle ...“). Daher haben bereits 1979 Tammann [13] und Colgate [14] unabhängig voneinander vorgeschlagen, dass die genannte Klasse von Supernovae bei höheren Rotverschiebungen zur Bestimmung

dieses Bremsparameters benutzt werden könnte. Inzwischen ist die Verwirklichung dieses Programms dank neuer Technologien ermöglicht worden. Wesentlich für die Entdeckung der Supernovae bei hohen Rotverschiebungen sind großflächige Detektoren an Großteleskopen, die es ermöglichen, digitale Aufnahmen relativ großer Himmelsareale zu erhalten. Für die anschließenden photometrischen und spektroskopischen Untersuchungen ist ferner der Einsatz der besten Großteleskope, wie dem *HST* und *Keck*, unerlässlich.

Zwei Forschergruppen haben diese Untersuchungen in den letzten Jahren vorangetrieben, nämlich das „Supernovae Cosmology Project“ (SCP, Homepage [15]) und das „High-Z Supernova Search Team“ (HZT). Beide Gruppen haben je über 70 Supernovae vom Typ Ia entdeckt und publizierten in jüngster Zeit fast identische Ergebnisse; siehe [16] bzw. [17]. In Anbetracht deren Bedeutung ist diese Übereinstimmung besonders hervorzuheben.

Bevor wir auf die Resultate eingehen, sind noch einige, zum Teil kritische Bemerkungen über die Natur und die physikalischen Eigenschaften einer Supernova vom Typ Ia nötig. Ihr unmittelbarer Vorgänger ist wahrscheinlich ein Weißer Zwerg, welcher hauptsächlich aus Kohlenstoff und Sauerstoff besteht und Teil eines engen Doppelsternsystems ist. Im Standardszenario strömt vom Begleiter Materie auf den Weißen Zwerg, sodass unter Umständen dessen Masse stetig zunimmt, bis die kritische Chandrasekhar-Masse erreicht wird und der Weiße Zwerg instabil wird. Dies führt dann entweder zu einem Kollaps auf einen Neutronenstern oder zur Zündung des entarteten Kohlenstoffs tief im Inneren. Im zweiten Fall entsteht eine nach außen propagierende subsonische nukleare Brennfront (eine Deflagration), wobei der Weiße

Kosmologische Distanzmaße

In der Kosmologie werden unterschiedliche Distanzmaße verwendet, welche aber über einfache Rotverschiebungsfaktoren verknüpft sind. Für uns ist die *Helligkeitsdistanz* D_L maßgebend, die durch $D_L = (L/4\pi F)^{1/2}$ definiert ist, wo L die intrinsische Luminosität der Quelle und F der beobachtete Energiefluss ist. Wie bei allen kosmologischen Distanzen setzt man D_L zweckmäßigerweise proportional zu $c/H_0 = 3000 h_0^{-1}$ Mpc und erhält

$$D_L(z) = \frac{c}{H_0} d_L(z; \Omega_M, \Omega_\Lambda) \quad (17)$$

mit der dimensionslosen Größe d_L , die in allen Friedmann-Lemaître-Modellen eine bekannte Funktion der Rotverschiebung z und der kosmologischen Parameter (5) ist.

Astronomen benutzen als logarithmische Maße für L und F sogenannte *absolute* bzw. *scheinbare Magnituden* M und m . Die Konventionen sind dabei so getroffen, dass der *Distanzmodul* $m-M$ mit D_L so zusammenhängt:

$$m - M = 5 \log \left(\frac{D_L}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25. \quad (18)$$

Eingesetzt in obige Darstellung von D_L ergibt sich die folgende Beziehung zwischen scheinbarer Magnitude m und Rotverschiebung z :

$$m = \mu + 5 \log d_L(z; \Omega_M, \Omega_\Lambda), \quad (19)$$

mit $\mu = M - 5 \log(H_0 \cdot 1 \text{ Mpc}/c) + 25$. Für Standardkerzen (einheitliches M) ist dies natürlich eine Konstante, welche als Anpassungsparameter behandelt wird. Durch Vergleich dieser theoretischen Erwartung mit Beobachtungsdaten ergeben sich dann die interessierenden Einschränkungen an die kosmologischen Parameter Ω_M und Ω_Λ .

In diesem Zusammenhang ist die folgende Bemerkung wichtig: Halten wir z im relevanten Intervall zwischen 0,4 und 0,8 der derzeitigen Beobachtungen fest, so definieren die Gleichungen $d_L(z; \Omega_M, \Omega_\Lambda) = \text{konst.}$ Entartungskurven in der Ω -Ebene. Da die Krümmungen dieser Kurven sich als gering erweisen, können wir ihnen eine ungefähre Steigung zuordnen. Für $z = 0,4$ ist diese nahe bei 1 und nimmt auf 1,5 bis 2 bei $z = 0,8$ zu, für den ganzen interessierenden Wertebereich von Ω_M und Ω_Λ . Deshalb können auch sehr genaue Daten nur ein schmales Band in der Ω -Ebene aussondern, was wiederum die langgestreckte Form der „Likelihood-Gebiete“ erklärt, die in Abb. 2 gezeigt werden. Er wird also darauf ankommen, mit unabhängigen Methoden mehrere, sich möglichst transversal schneidende Gebiete auszusondern.

tes“ auf der kosmischen Photosphäre, d.h. der Distanz, welche eine Druckwelle bis zum Zeitpunkt der Rekombination durchlaufen kann. Der Öffnungswinkel, unter welchem wir diese Ausdehnung sehen (er beträgt etwa 1°), hängt im Wesentlichen nur von der räumlichen Krümmung ab. Dabei wirkt eine positive Raumkrümmung auf Lichtstrahlen fokussierend (man denke sich als Analogon Lichtstrahlen auf einer Kugeloberfläche durch Großkreise gegeben) und daher wie bei einer Lupe vergrößernd. Bei negativer Krümmung ist es umgekehrt. Für positive Krümmung (negatives Ω_K) wird das Maximum also zu größeren Winkelabständen hin verschoben, für negative Krümmung (positives Ω_K) zu kleineren. Einem flachen Universum entspricht eine Lage des ersten Maximums bei etwa 1° bzw. $\ell = 200$ in der Entwicklung nach Kugelfunktionen.

Die Daten der neuesten Ballonexperimente „Boomerang“ [19] und „Maxima-1“ [20] zeigen fast identische Ergebnisse mit einem sehr deutlichen ersten Maximum bei $\ell \approx 200$ (Abb. 4, [21]). Richtige Präzisionsvermessungen wird der NASA-Satellit MAP (Microwave Anisotropy Probe [22]) liefern, dessen Start für den Herbst diesen Jahres vorgesehen ist. Leider sind die Europäer viel langsamer: Der Start der ESA-Mission PLANCK [23] ist inzwischen auf 2007 verschoben worden.

Fazit und Ausblick

Wir haben astronomische Beobachtungen besprochen, die es jeweils gestatten, schmale aber langgestreckte Gebiete in der Ebene der zwei unabhängigen kosmologischen Parameter Ω_M und Ω_Λ auszusondern. Zusammengenommen ergeben diese die ungefähren Werte

$$(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_K, q_0) \approx (1/3, 2/3, 0, -1/2), \quad (8)$$

wobei wir die abhängigen Parameter Ω_K der Krümmung und den Bremsparameter q_0 gleich mit aufgelistet haben.

Demnach befindet sich das gegenwärtige Universum in einem Zustand beschleunigter Expansion, den es für

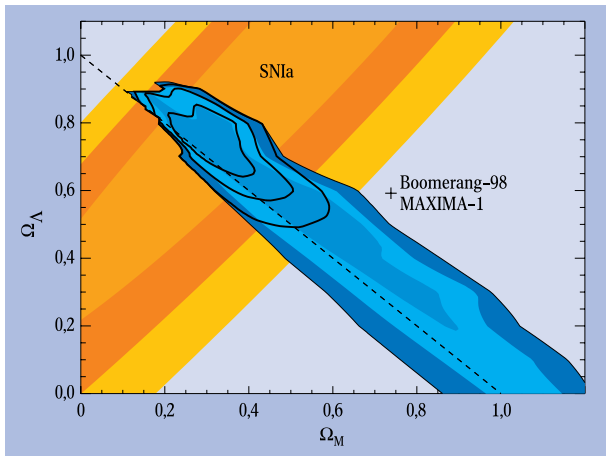


Abb. 3: Die Konfidenzgebiete (68%, 95% und 99%) in der $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ -Ebene der Daten aus dem Mikrowellen-Hintergrund (orange, Boomerang- und Maxima-1-Experimente) stehen nahezu senkrecht auf denjenigen der Supernovae-Daten (blau). Der Überlapp beider Gebiete ist relativ klein. Die schwarzen Konturen im Überlappungsgebiet beranden die entsprechenden Konfidenzgebiete der gemeinsamen Daten. Flache Modelle liegen auf der schwarz-gestrichelten Diagonalen. Die in [24] berichteten Daten für Galaxienhaufen, die hier nicht eingezeichnet sind, sondern einen weiteren Streifen $\Omega_M = 0,3 \pm 0,1$ (1σ) aus, der dieses Überlappungsgebiet voll trifft. Das Diagramm ist [21] entnommen.

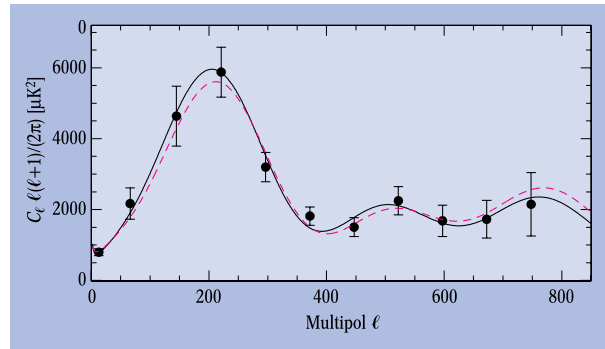


Abb. 4: Leistungsspektrum der Anisotropien des Mikrowellen-Hintergrundes (Frequenz 150 GHz) aus den kombinierten Daten der Boomerang- und Maxima-1-Experimente; aufgetragen ist der gewichtete Entwicklungskoeffizient c_ℓ aus der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen (Multipolentwicklung). Deutlich ist ein erstes Maximum bei $\ell \approx 200$ zu sehen, das einem typischen Winkeldurchmesser der Anisotropien von $\Delta\theta = \pi/\ell \approx 1^\circ$ entspricht. Das 95%-Konfidenzintervall für $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_M + \Omega_\Lambda$ beträgt $\Omega_{\text{tot}} = 1,11 \pm 0,13$, ist also mit einem flachen Modell $\Omega_{\text{tot}} = 1$ verträglich. Die gestrichelte Kurve entspricht einer besten Anpassung eines flachen Modells mit den kosmologischen Parametern $(\Omega_B, \Omega_M, \Omega_\Lambda, h) = (0,05, 0,3, 0,7, 0,7)$. Zusammen mit den Supernovae-Daten führt dies zur insgesamt besten Anpassung. Ω_B bezeichnet den baryonischen Anteil von Ω_M . Das Diagramm ist [21] entnommen.

alle Zukunft beibehalten wird (siehe Infokasten 1). Es ist räumlich nahezu flach und die Dichte an Materie, inklusive der dunklen Materie, macht nur etwa ein Drittel der kritischen Dichte aus. Den doppelten und damit dominierenden Betrag an gravitativ wirksamer Energie- bzw. Massendichte stellt der kosmologische Term.

Hinsichtlich der oft gestellten Frage, ob wir in einem offenen oder geschlossenen Universum leben, ist folgender mathematischer Umstand zu beachten: Ein Universum positiver konstanter Krümmung ist notwendig geschlossen, also auch von endlichem Volumen. Ein flaches oder negativ gekrümmtes Universum kann, muss aber nicht offen, also von unendlichem Volumen sein. Hier werden die Zusammenhangsverhältnisse im Großen, d.h. die Topologie, nicht durch die Geometrie festgelegt. Die hier besprochenen Daten sind sowohl mit verschwindender als auch mit genügend kleinen Krümmungen beider Vorzeichen verträglich.

Es ist sehr befriedigend, dass andere und physikalisch unabhängige Methoden, wie z.B. Beobachtungen an reichen Galaxienhaufen, ebenfalls zu einem Wert $\Omega_M \approx 0,3 \pm 0,1$ (1σ) gelangen (siehe [24]). Auch Massenbestimmungen mit Hilfe des Gravitationslinseneffektes stützen diesen Wert in schöner Weise (siehe z.B. [25]). Darüber hinaus ist es möglich, den baryonischen Anteil Ω_B von Ω_M getrennt zu bestimmen. Dies geschieht einerseits mit Hilfe der primordialen Häufigkeit der leichten Elemente, wie sie sich aus dem Urknallszenario der Nukleosynthese ergibt, andererseits durch Bestimmung von Intensitätsprofilen der Röntgenstrahlung des heißen Intrahaufengases. Dabei ergibt sich übereinstimmend, dass nur etwa 1/6 der durch Ω_M repräsentierten Materie baryonischer Natur ist. Die Natur des restlichen und überwiegenden Anteils der Materie, die Ω_M ausmacht, ist uns bisher nicht bekannt.

Zusammen mit dem noch unklaren Ursprung von Ω_Λ kann man also sagen, dass wir heute nur etwa 1/20 der gravitativ nachweisbaren Energie in Materie-

formen von uns bekannter Natur lokalisieren können. Auch in Anbetracht dieser Tatsache erscheinen gelegentliche Ankündigungen des Endes der Physik etwas verfrüht zu sein.

Auf die in jüngerer Zeit vorgeschlagenen Versuche, das kosmische Koinzidenzproblem zu lösen, können wir hier nicht weiter eingehen. Die allgemeine Idee besteht darin, die kosmologische Konstante durch eine neue exotische Form von dynamischer Materie mit negativem Druck zu ersetzen. In Anlehnung an die ursprüngliche Bedeutung dieses Wortes hat diese den Namen „Quintessenz“ bekommen. In konkreten Modellen wird sie durch ein Skalarfeld beschrieben, dessen Dynamik so eingerichtet ist, dass sich die Energiedichte des Feldes von selbst der Materiedichte angleicht, und dies weitgehend unabhängig von den Anfangsbedingungen [26]. Die kosmologische Konstante wird also durch eine dynamische Größe ersetzt. Zukünftige genauere Beobachtungen werden es ermöglichen, eine der beiden Möglichkeiten zu verwerfen.

Literatur

- [1] A. Einstein, Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse, VI, 142-152 (1917)
- [2] E. Harrison, Physics Today, Feb. 1986, S. 24
- [3] H. Seeliger, Sitzungsber. Königl. Bayer. Akad. Wiss., math.-phys. Klasse, Jahrg. 1909, 4. Abhandlung 1-25
- [4] Wolfgang Pauli, Relativitätstheorie, (neu herausgegeben von D. Giulini, Springer-Verlag Heidelberg, 2000).
- [5] O. Heckmann, Theorien der Kosmologie, berichtigter Nachdruck, Springer-Verlag, Berlin 1968.
- [6] J. Barbour, H. Pfister (Hrsg.), Mach's Principle, Einstein Studies Vol. 6, Birkhäuser Verlag, Boston 1995
- [7] J. Gribbin, The Birth of Time (Phoenix Paperback, Orion Books Ltd, London 2000)
- [8] A. Einstein, Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse, XII, 3 (1931)
- [9] A. Einstein Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie, Vieweg 1956; hier zitiert ist Fußnote 1 aus Anhang I.
- [10] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [11] W. Baade, Astrophys. J. **88**, 285 (1938)
- [12] B. R. Parodi, A. Saha, A. Sandage, G. A. Tammann, (<http://xxx.lanl.gov>) arXiv:astro-ph/0004063
- [13] G. A. Tammann, ESA/ESO workshop on astronomical uses of the space telescope, 329. Herausgegeben von F. Macchetto, F. Pacini und M. Tarenghi, ESO, Genf 1979
- [14] S. A. Colgate, Astrophys. J. **232**, 404 (1979)
- [15] SCP Homepage: (<http://www-supernova.LBL.gov>)
- [16] S. Perlmutter et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1999)
- [17] A. G. Riess et al., Astron. J. **117**, 707 (1999)
- [18] A. G. Riess, (<http://xxx.lanl.gov>) arXiv:astro-ph/0005229
- [19] P. de Bernardis et al., Nature **404**, 955 (2000). Siehe auch die BOOMERANG-Homepage: (<http://puck.roma1.infn.it/>), A. E. Lange et al., (<http://xxx.lanl.gov>) arXiv:astro-ph/0005004
- [20] S. Hanany et al., (<http://xxx.lanl.gov>) arXiv:astro-ph/0005123
- [21] A. H. Jaffe et al., (<http://xxx.lanl.gov>) arXiv:astro-ph/0007333
- [22] MAP-Homepage: (<http://map.gsfc.nasa.gov>)
- [23] PLANCK-Homepage: (<http://sci.esa.int/home/planck>)
- [24] N. A. Bahcall, J. P. Ostriker, S. Perlmutter, P. J. Steinhardt, Science **284**, 1481 (1999). Eine aktualisierte Version ist bei (<http://xxx.lanl.gov>) unter arXiv:astro-ph/9906463 erhältlich
- [25] H. Böhringer et al., Astron. Astrophys. **334**, 789 (1998)
- [26] I. Zlatev, L. Wang, P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1998)